GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 1 — 1 OCTOMBRIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 1 — 1 OCTOMBRIE 1944

ABONAMENTUL LEI 300 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CERCUL LUI EULER*)

1°. **Ortocentru. Triunghiu ortic.** Fiind dat un triunghiu ABC, pe care să-l numim *triunghiu fundamental*, înscris într'un cerc de centru O şi rază R, să considerăm A', B', C' proecţiile vârfurilor A, B, C pe laturile opuse.

Se demonstrează în manualele de clasa a V-a secundară că *înălţimile* AA', BB', CC' *se întâlnesc într'un punct.* Acest punct notat H se numeşte *ortocentrul triunghiului.*

Triunghiul obţinut unind picioarele înălţimilor se numeşte *triunghiu ortic.*

2°. **Proprietate.** *Înălţimile triunghiului fundamental sunt bisectoarele triunghiului ortic.*

Din patrulaterele inscriptibile HA'BC', HA'CB' rezultă

$$\sphericalangle HA'C' = \sphericalangle HBC' = 90^0 - \sphericalangle BAC$$

$$\sphericalangle HA'B' = \sphericalangle HCB' = 90^0 - \sphericalangle BAC.$$

Deci

$$\sphericalangle HA'C' = HA'B'.$$

Rezultă că laturile triunghiului fundamental sunt bisectoarele exterioare ale triunghiului ortic.

3°. **Proprietate.** *Punctele în care înălţimile unui triunghiu întâlnesc cercul circumscris sunt simetricele ortocentrului faţă cu laturile corespunzătoare.*

Fie α, β, γ punctele în care înălţimile AA', BB', CC' întâlnesc cercul circumscris. Avem:

$$\sphericalangle \alpha CB = \sphericalangle \alpha AB = 90^0 - B = \sphericalangle C'CB.$$

*) In această notă şi în cele ce vor urma se vor prezenta chestiuni elementare de matematici, neconţinute de Programa Analitică a liceelor.

Deci α, H sunt simetrice față cu BC. La fel se dovedește că β, γ sunt simetricele lui H față cu CA, AB.

4°. **Cercul lui Euler** *). *Se numește astfel cercul circumscris triunghiului ortic* ABC. Fie ω centrul său.

Din proprietatea 3°, rezultă că triunghiurile A'B'C' și $\alpha\beta\gamma$ sunt omotetice, în raportul 1/2, cu centrul de omotetie H. In această omotetie, cercului $\alpha\beta\gamma$ circumscris și triunghiului fundamental îi corespunde cercul lui EULER. Rezultă că ω, centrul cercului lui EULER se găsește la mijlocul segmentului OH, că raza sa este $\frac{1}{2}$ R, că omoteticele vârfurilor A, B, C care sunt mijloacele segmentelor $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ se găsesc pe cercul lui EULER.

Cercul lui EULER *trece și prin mijloacele laturilor triunghiului fundamental.*

In adevăr, fie A_1, B_1, C_1 punctele în care cercul lui EULER taie a doua oară laturile BC, CA, AB. Perpendiculara pe mijlocul coardei $A'A_1$ trece prin ω și cum paralelele ce determină segmente egale pe BC, determină segmente egale și pe dreapta OH, rezultă că perpendiculara în A_1 pe BC, trece prin O, deci A_1 este mijlocul laturii BC.

Așa dar, *cercul lui* EULER *trece prin picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor triunghiului fundamental și prin mijloacele segmentelor* HA, HB, HC. *De aceea se mai numește cercul celor nouă puncte.*

Dreapta OH se numește *dreapta lui* EULER.

5°. **Altă demonstrație.** Să arătăm pe o altă cale că punctele de mai sus se găsesc pe un cerc.

a) Patrulaterul $A_1B_1C_1A'$ este trapez isoscel. In adevăr dreapta B_1C_1, unind mijloacele a două laturi ale triunghiului fundamental, este paralelă cu BC.

Pentru același motiv, $\overline{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

In triunghiul dreptunghiu AA'B, mediana ipotenuzei, $\overline{A'C_1}$, este egală cu jumătatea ipotenuzei, $\frac{1}{2}\overline{AB}$. Deci

$$\overline{B_1A_1} = \overline{A'C_1}.$$

---

*) LEONARD EULER matematician elvețian, născut la Bâle în 1707 și mort la St. Petersburg în 1783. A fost membru al Academiei din St. Petersburg, unde a trăit cea mai mare parte din viață. Opera sa matematică este foarte bogată și fundamentală în mersul matematicelor.

Cum un trapez isoscel este patrulater inscriptibil, rezultă că A', piciorul înălțimii, se găsește pe cercul $A_1B_1C_1$. Analog se arată că B', C' se găsesc pe acest cerc.

b) Dacă se notează α' mijlocul segmentului AH, și patrulaterul $\alpha'A_1B_1C_1$ este inscriptibil.

Din paralelismul dreptelor (A_1B_1, AB), (A_1C_1, AC) rezultă

$$\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle BAC.$$

Dar $\alpha'B_1$ unind mijloacele laturilor AH, AC în triunghiul AHC, este paralelă cu HC. La fel, $\alpha'C_1$ unind mijloacele laturilor AH, AB în triunghiul AHB, este paralelă cu HB, deci

$$\sphericalangle B_1\alpha'C_1 = \sphericalangle BHC = 180^0 - \sphericalangle BAC.$$

Rezultă

$$\sphericalangle B_1A_1C_1 + \sphericalangle B_1\alpha'C_1 = 180^0,$$

deci patrulaterul $\alpha'B_1A_1C_1$ este inscriptibil. La fel se arată că mijloacele segmentelor BH, CH se găsesc pe cercul $A_1B_1C_1$.

Astfel s'a dovedit despre punctele A_1, B_1, C_1, A', B', C' și mijloacele segmentelor AH, BH, CH că sunt pe un cerc.

6⁰. **Axa ortică.** *Laturile corespunzătoare ale triunghiurilor fundamental și ortic se întâlnesc în trei puncte situate pe o dreaptă numită axa ortică.*

Axa ortică este axă radicală a cercurilor EULER *și circumscris, deci este perpendiculară pe dreapta lui* EULER.

Demonstrația este următoarea:

Patrulaterul BCB'C' fiind inscriptibil, deoarece din B', C' se vede segmentul BC sub unghiuri drepte, rezultă

$$\overline{A''B} \times \overline{A''C} = \overline{A''C'} \times \overline{A''B'},$$

(puterea punctului A'' față cu cercul BCB'C').

Dar prima parte a egalității reprezintă și puterea punctului A'' față cu cercul circumscris, iar partea a doua, puterea lui A'' față cu cercul lui EULER; deci A'', având puteri egale în raport cu aceste două cercuri, se află pe axa lor radicală. La fel se dovedește că B'', C'' se află pe axa radicală a cercurilor EULER și circumscris.

7°. **Schimbarea triunghiului de referinţă.** Proprietăţile stabilite pentru figura de mai sus, conduc la proprietăţi între alte elemente ale unui triunghiu, când se schimbă triunghiul de referinţă. Să stabilim o proprietate în figura de mai sus şi să vedem care este corespondenta ei, când luăm ca triunghiu de referinţă triunghiul A'B'C'. H este centrul cercului său înscris; A, B, C sunt centrele cercurilor exînscrise.

Triunghiul $\alpha'A'A_1$ fiind dreptunghiu, $\alpha'A_1$ este diametru, deci trece prin ω şi cum α' este mijlocul arcului $B'\omega C'$, $\alpha'A_1$ este perpendiculară pe dreapta B'C'.

Omotetica dreptei $\alpha'\omega$ în omotetia considerată mai sus este dreapta AO, deci AO este perpendiculară deasemenea pe B'C'. Analog se arată că dreptele BO, CO sunt perpendiculare respectiv pe dreptele A'C', A'B'.

Rezultă astfel următoarea proprietate:

Perpendicularele coborîte din centrele cercurilor exînscrise de laturile corespunzătoare ale triunghiului de referinţă sunt concurente în simetricul centrului cercului înscris faţă cu centrul cercului circumscris.

Fiecare proprietate stabilită mai sus conduce la o altă proprietate, când se ia triunghiul A'B'C' ca triunghiu de referinţă. Astfel proprietatea stabilită la punctul 6 se transformă în următorea:

Laturile corespunzătoare ale triunghiului format de centrele cercurilor exînscrise şi ale triunghiului fundamental se întâlnesc în trei puncte situate pe o dreaptă perpendiculară pe dreapta ce uneşte centrele celor două cercuri circumscrise, dreaptă care este axa lor radicală.

C. IONESCU-BUJOR.

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 575. Care este restul diviziunii prin numărul prim* p *al sumei:*

$$A^{(p-2)^n} + B^{(p-2)^{n+1}}$$

I. L.

Ştim că:

$$(p-2)^n = k(p-1) + (-1)^n$$

$$= \begin{cases} k(p-1)+1 \ ; & \text{dacă } n \text{ este par} \\ (k-1)(p-1)+p-2 \ ; & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Deci restul diviziunei primei părţi a sumei va fi:
A, dacă n este par ; A^{p-2}, dacă n este impar.
De asemenea restul diviziunii părţii a doua a sumei va fi, ţinând seamă că:

$$B^{(p-2)^{n+1}} = (B^{p-2})^{(p-2)^n}:$$

B^{p-2}, dacă n este par ; $(B^{p-2})^{p-2} = B^{(p-2)^2}$, dacă n este impar.

Aşa dar restul total va fi:

$(A+B^{p-2})$, dacă n este par ; $(A^{p-2}+B^{(p-2)^2})$, dacă n este impar.

I. L.

E. G. 576. Să se arate că:

$$\Sigma a^\alpha . \left[a^{\varphi\left(\frac{N}{a^\alpha}\right)} - 1 \right] = MN$$

unde $N = a^\alpha . b^\beta \ldots$ şi $\varphi(i)$ este indicatorul lui i.

I. L.

Avem după teorema lui FERMAT generalizată de EULER:

$$a^{\varphi\left(\frac{N}{a^\alpha}\right)} - 1 = M\left(\frac{N}{a^\alpha}\right).$$

Prin urmare:

$$a^\alpha . \left[a^{\varphi\left(\frac{N}{a^\alpha}\right)} - 1 \right] = MN.$$

$$b^\beta . \left[b^{\varphi\left(\frac{N}{b^\beta}\right)} - 1 \right] = MN$$

. . . . . .

Deci şi suma lor va fi MN.

I. L.

E. G. 578. Să se arate că:

$$3^9 . (3^{256} - 1) = M\,17 . 257 . 512.$$

Avem:

$$3^{256} - 1 = (3^{16} - 1)\,(3^{16} + 1)\,(3^{32} + 1)\,(3^{64} + 1)\,(3^{128} + 1)$$

Deci, după teorema lui FERMAT: $3^{17-1} - 1 = M17$.

Apoi: $3^{257-1} - 1 = M257$ deoarece 257 este un număr prim.

In sfârşit: $\varphi(512) = 256$, deci după teorema lui FERMAT generalizată de EULER avem: $3^{\varphi(512)} - 1 = M512$.

I. L.

E. G. 579. Se zice că numerele A *şi* B *sunt amice (sau amiabile) când satisfac relaţia:*

$$A = s(B) - B \quad \text{şi} \quad B = s(A) - A$$

unde $s(i)$ este suma divizorilor lui i.

Să se arate că avem:

$$s(A . B) < A . s(B) + B . s(A).$$

I. L.

Ştim dela *„divizori“* că:

$$s(A . B . C \ldots) < s(A) . s(B)\, s(C) \ldots$$

mai ştim apoi că dacă A şi B sunt numere amice, din însăşi definiţia lor rezultă că:

$$s(A) = s(B) = A + B$$

Prin urmare:

$$s(A) . s(B) = (A + B)^2 = A(A + B) + B(A + B)$$
$$= A . s(B) + B s(A).$$

I. L.

Până la 1 Septembrie 1944 s'au primit soluții bune pentru exercițiile publicate în numerele 7, 8, 9, Vol. X dela:

Liceul „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa a V-a: Ghebeleș I. Delia (V: 820, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Dr. Ion Meșotă", Brașov

Clasa a VIII-a: Nistor V. H. (VIII: 671).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa a VII-a: Soare V. M. (VII: 764. E. G.: 613, 5, 7).

Liceul „Matei Basarab", București.

Clasa a VII-a: Munt M. E. (VII: 752, 5, 7, 60).
Clasa a VIII-a: 667, 8, 9, 76, 7, 80, 3, 4, E. G.: 615).

Liceul „Titu Maiorescu", București.

Clasa a VI-a: Ardare N. N. (E. G.: 613, 4, 6).
Clasa a VII-a: Cantuniar I. C. (VII: 752, 3, 4, 5, 6, 7).

Liceul „Spiru Haret", București.

Clasa a VIII-a: Prassa G. C. (VII: 676, 7, 8, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, E. G.: 613, 5, 6).

Liceul „D. B. Știrbey", Câmpina.

Clasa a VI-a: Lungu A. I. (VI: 842. E. G.: 633, 9, 40).

Liceul „Ioniță Assan", Caracal.

Clasa a VIII-a: Barbu A. I. (E. G. 613, 6, 20).

Liceul „Frații Buzești", Craiova.

Clasa a VII-a: Dobrișan A. A. (VII: 745, 55. E. G.: 615, 6).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploiești.

Clasa a VI-a: Constantinescu R. M. (VI: 820, 2. VII: 752, 5. VIII: 669, 70, 1, 4. E. G. 606).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timișoara.

Clasa a V-a: Tripșa I. (V: 830, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 42).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa a III-a: Siminica V. (III: 246, 7, 8), Lugoj G. C. (III: 246, 7, 8).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Ianuarie 1945

Clasa a III-: *Exerc. 264.* Intr'un cerc (O) este înscris triunghiul isoscel BAC ($\overline{AB} = \overline{AC}$). Înălţimile $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ prelungite taie cercul (O) a doua oară în M, N, P.

Să se arate, că

$$\sphericalangle PON = 360^0 - 4 \cdot \sphericalangle BAC.$$

O. N. Ţ.

III. 265. Fie ABC un triunghiu oarecare şi O centrul cercului ABC. Inălţimile AA', BB', CC' ale triunghiului ABC prelungite taie a doua oară cercul ABC respectiv în punctele M, N, P. Să se calculeze unghiurile interioare ale exagonului APBMCN.

O. N. Ţ.

III. 266. Fie triunghiul ABC având unghiul A de 60°. Perpendiculara pe AB în mijlocul său M taie pe AC în M', iar perpendiculara pe AC în mijlocul său N taie pe AB în N'.

Să se arate, că segmentul M'N' este egal cu latura BC.

O. N. Ţ.

Clasa a IV-a: *Exerc. 707.* Fie dat patratul ABCD. Prelungim latura AB cu segmentul $\overline{BM} < \overline{AB}$ şi prin M ducem o paralelă la BD, care taie laturile BC, CD şi prelungirea lui AD respectiv în punctele N, P, R. Dreptele AN şi AP taie respectiv dreptele DC şi BC în T şi S. Să se arate, că patrulaterul MTSR este trapez isoscel şi să se calculeze *perimetrul, aria* şi *diagonalele lui.*

O. N. Ţ.

IV. 708. Un patrat are latura $\overline{AB} = 2a$. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale patratului luăm punctele E, F, G, H astfel ca

$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = a + b \qquad (b < a).$$

Să se afle aria patratului ABCD.

C. I. B.

IV. 709. Să se construiască triunghiul ABC având $\overline{AB} = 8$mm, $\overline{AC} = 16$ mm şi unghiul A de 60^0; apoi pe latura BC dreptunghiul BCDE. Să se calculeze perimetrul dreptunghiului, ştiind că aria lui este $\frac{3}{4}$ din aria triunghiului ABC.

C. I. Ţ.

IV. 710. Se dau polinoamele

$P_1 \equiv 4a^3 - 3a^2 + 2a - 1$; $P_2 \equiv a^3 - 2a^2 + 3a - 1$;

$P_3 \equiv 4a^3 + 3a^2 + 2a + 1$; $P_4 \equiv a^3 + 2a^2 + 3a + 1$.

Să se calculeze polinoamele

$Q_1 \equiv P_1 + P_2 + P_3 + P_4$; $Q_2 \equiv P_1 - P_2 + P_3 - P_4$;

$Q_3 \equiv P_1 - (P_2 - P_3 - P_4)$; $Q_4 \equiv P_1P_3 - P_2P_4$;

$Q_5 \equiv P_1P_2P_3P_4$.

C. I. B.

Clasa a V-a: *Exerc. 840.* Să se arate, că

$$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1)(a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2) - (a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2)(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1)$$
$$= \Sigma [(a_1x_1 + b_1x_2)(a_2y_1 + b_2y_2) - (a_1y_1 + b_1y_2)(a_2x_1 + b_2x_2)$$
$$= \Sigma (a_1b_2 - a_2b_1)(x_1y_2 - x_2y_1)].$$

N. M.

V. 841. Să se arate, că

$$(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1)^2 + (a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2)^2 - \frac{5}{2}(a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2)(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1)$$
$$+ \frac{9}{2}(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1)(a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2)$$
$$= (a_1x_2 + a_2x_1 + b_1y_2 + b_2y_1 + c_1z_2 + c_2z_1)^2$$
$$+ \frac{9}{2}[(a_1b_2 - a_2b_1)(x_1y_2 - x_2y_1) + (b_1c_2 - b_2c_1)(y_1z_2 - y_2z_1) + (c_1a_2 + c_2a_1)(z_1x_2 - z_2x_1)].$$

N. M.

V. 842. Să se descompună în factori de gradul întâi expresia

$$E \equiv -n(m-p)^4(m-n)^2 + p(m-n)^4(m-p)^2$$
$$+ m^4(n-p)[m^2+n^2+p^2+np-2m(n+p)]$$
$$+ np(n-p)[2m^3(n+p) - m^2(n^2+p^2+5np)$$
$$+ 2mnp(n+p) - n^2p^2].$$

N. M.

V. 843. Într'un cerc (O) este înscris un triunghiu isoscel BAC ($\overline{AB} = \overline{AC}$). Înălțimile AH, BH, CH ale triunghiului BAC taie respectiv cercul (O) în punctele M, N, P.

Să se arate, că cercurile NHC și PHB trec prin centrul cercului (O).

O. N. Ț.

V. 844. Fie triunghiul oarecare ABC; A', B', C' picioarele înălțimilor AA', BB', CC'; M și N simetricele punctului A' în raport cu AB și AC; P intersecția dreptelor MB, NC.

Să se arate, că

a) Punctele M, C', B', N sunt pe aceeași dreaptă.

b) Triunghiul MPN este isoscel.

c) Cercul BPC trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

O. N. Ț.

Clasa a VI-a: *Exerc. 854.* Să se rezolve ecuația

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = 2 \cdot \frac{2x-1}{2x+1} \cdot \frac{x-2}{x+2}$$

I. I. S.

VI. 855. Să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$2mx^4 + (1-5m)x^3 + 2(3m-1)x^2 + (1-5m)x + 2m = 0,$$

m fiind un parametru.

I. I. S.

VI. 856. Intr'un triunghiu ABC cu laturile $\overline{AB}=8m$, $\overline{AC}=16m$ şi unghiul A de 60°, pe latura BC ca diagonală se construeşte un dreptunghiu astfel că suprafaţa dreptunghiului este $\frac{3}{4}$ din suprafaţa triunghiului. Se cere perimetrul dreptunghiului.

C. I. Ţ.

VI. 857. Dacă a, b, c sunt trei numere în progresie aritmetică, numerele

$$2b^2-a \quad , \quad ac \quad , \quad 2b^2-c^2$$

sunt de asemenea în progresie aritmetică.

C. I. B.

VI. 858. Dacă un trapez are baza mică, înălţimea şi baza mare în progresie aritmetică, aria sa este constantă dacă înălţimea este constantă.

C. I. B.

VI. 859. Să se arate, că nu sunt trei numere distincte care fiind în progresie aritmetică să fie şi în progresie geometrică.

O. N. Ţ.

Clasa a VII-a: *Exerc. 801.* Dacă t_a, t_b, t_c sunt lungimile tangentelor comune ale cercurilor descrise pe laturile unui triunghiu oarecare ca diametre, avem

$$\sum \frac{t_b^2+t_c^2}{a} = \prod \frac{t_b^2+t_c^2}{a}.$$

I. I. S.

VII. 802. Dacă t_a, t_b, t_c sunt lungimile tangentelor comune ale cercurilor descrise pe laturile unui triunghiu ca diametre, avem

$$\Sigma\, t_a^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = r(4R+r),$$

celelalte notaţii fiind cele obişnuite.

I. I. S.

VII. 803. Intr'un internat sunt 12 mese, la fiecare masă pot sta 6 elevi. In câte feluri se pot aşeza la masă cei 72 elevi ai internatului ?

C. I. B.

VII. 804. In basme este vorba despre un balaur cu 7 capete, care a fost ucis de Fătfrumos tăindu-i întâi două capete, apoi alte două capete, a trei oară din nou două capete, în fine după o luptă cruntă tăindu-i şi ultimul cap. Dar basmul nu ne spune dacă erau la fel cele 7 capete ale balaurului.

Să presupunem deci, că erau deosebite ca înfăţişare şi că fiecare avea una din cele şapte culori ale spectrului solar. In câte feluri se puteau tăia capetele balaurului în această ipoteză ?

C. I. B.

VII. 805. In balada *„Mihu Copilul"* calul năzdrăvan vrând să-şi lămurească stăpânul asupra mersului său prudent, spune:

„Dar ce mă apasă
Şi 'n drum nu mă lasă,
Că s'aţin pe-aici
Patruzeci şi cinci
Cincizeci fără cinci
De haiduci levinţi,
Duşi dela părinţi
De când erau mici
La codru 'n potici.
Şi-acum se găsesc
De benchetuesc
La masă de piatră
In patru crăpată
Cu sârmă legată, etc."

In câte moduri se puteau aşeza haiducii la masă ? Dar dacă 5 haiduci ar fi străjuit totdeauna în timpul mesei ?

C. I. B.

VII. 806. Să se verifice relaţia

$$C_{m-1}^{n-1} + C_{m-2}^{n-1} = \frac{n(2m-n-1)}{(m-n)(m-n-1)} C_{m-2}^{n},$$

unde C_p^r este simbolul combinărilor.

O. N. Ţ.

VII. 807. Să se stabilească identitatea

$$(C_m^{p-1})^2 - C_m^p \cdot C_m^{p-2} \equiv (C_{m+1}^{p-1})^2 - C_{m+2}^p \cdot C_m^{p-2},$$

unde C_n^r este simbolul combinărilor.

O. N. Ţ.

Clasa a VIII-a: *Exerc. 708.* Să se calculeze sumele

$$\sqrt{\frac{37+i\sqrt{47}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{35+i\sqrt{47}}{2}},$$

$$\sqrt{\frac{37+i\sqrt{47}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{35-i\sqrt{47}}{2}},$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

GH. B.

VIII. 709. Dacă O este origina pe o axă pe care se află trei puncte A, B, C, să se arate că

$$\overline{AB}^4 + \overline{BC}^4 + \overline{CA}^4 = 2(\overline{OA} \cdot \overline{AB} + \overline{OB} \cdot \overline{BC} + \overline{OC} \cdot \overline{CA})^2.$$

I. I. S.

VIII. 710. Fie date punctele A (4, 3) şi B (4, 0). Simetricul lui A în raport cu dreapta OA este punctul C. Să se afle coordonatele punctului C.

C. I. B.

VIII. 711. Se dau axele rectangulare OX, OY şi punctul $M(a+b,\ a-b)$. Să se afle coordonantele simetricului său, N, faţă cu bisectoarea unghiului XOY; apoi coordonatele vârfurilor celor două patrate ce pot fi construite pe $\overline{MN}$ ca latură; ariile celor două patrate.

C. I. B.

VIII. 712. Fie date punctele $A(a,\ b)$ şi $B(a,\ 0)$. Simetricul lui B în raport cu OA este punctul C. Să se afle coordonatele punctului C. Caz particular $a = 1,\ b = \sqrt{3}$.

C. I. B.

VIII. 713. Intr'un triunghiu ABC se cunosc $\overline{BC} = a$ şi unghiurile B, C. Se ia un sistem de axe rectangulare având origină în ortocentru şi axa $x'x$ pe înălţimea vârfului A. Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului ABC şi ale triunghiului complementar. Aceeaşi chestiune când axa $x'x$ se află pe înălţimea vârfului B.

C. I. B.

VIII. 714. Intr'un triunghiu ABC sunt cunoscute $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ şi unghiul B. Se ia un sistem de axe rectangulare având origina în centrul cercului ABC şi axa $x'x$ paralelă cu BC. Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului ABC şi ale vârfurilor triunghiului său ortic.

C. I. B.

VIII. 715. Intr'un triunghiu ABC sunt cunoscute $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, şi unghiul A. Se ia un sistem de axe rectangulare având dreapta BC axă $x'x$ şi perpendiculara din A pe BC ca axă $y'y$. Să se afle coordonatele vârfurilor triunghiului ABC şi ale triunghiului complementar.

C. I. B.

Exerciţii Generale. *Exerc. 643.* Dacă p este un număr întreg pozitiv, expresia

$$E \equiv 18^{3p(p+1)+2} - 7 \cdot 18^{p(p+1)+2} + 7 \cdot 18^{p(p+1)-2} - 324$$

este divizibilă cu 323.

O. N. Ţ.

E. G. 644. Dacă p este un număr întreg pozitiv, expresia

$$E \equiv 17 \cdot 102^{(p+2)(p+3)} - 31 \cdot 102^{(p+1)(p+2)} + 23 \cdot 102^{p(p+1)} - 93636,$$

este divizibilă cu 10403.

O. N. Ţ.

E. G. 645. Dacă p este număr întreg pozitiv, expresia

$$E \equiv 6 \cdot 4^{2p^2+8p+10} + 6 \cdot 4^{2p^2+4p+4} - 9 \cdot 4^{2p^2+6p+10} - 4^{2p^2+6p+5}$$
$$+ 3 \cdot 4^{(p+2)(p+5)} - 2 \cdot 4^{(p+1)(p+4)} - 2 \cdot 4^{p(p+1)} + 3 \cdot 4^{p(p-1)} - 1$$

este divizibilă cu 15^2.

O. N. Ţ.

E. G. 646. Să se arate, că numărul

$$N \equiv 99\ldots9\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}\ 800\ldots01\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

este patrat perfect.

O. N. Ţ.

E. G. 647. Să se arate, că numărul

$$N \equiv 100\ldots0\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}\ 200\ldots01\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

este patrat perfect.

O. N. Ţ.

E. G. 648. Să se arate, că numerele

$$N_1 \equiv 99\ldots9\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}\ 600\ldots04\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}\ ;\quad N_3 \equiv 99\ldots9\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}\ 400\ldots09\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

$$N_2 \equiv 100\ldots0\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}\ 400\ldots04\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}\ ;\quad N_4 \equiv 100\ldots0\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}\ 600\ldots09\ \underbrace{}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

sunt patrate perfecte.

O. N. Ţ.

E. G. 649. Să se arate, că numerele de forma

$$N \equiv \underbrace{99\ldots9}_{\text{de } n \text{ ori}}\ \underbrace{00\ldots0}_{\text{de } n \text{ ori}}25$$

sunt patrate perfecte.

O. N. Ţ.

E. G. 650. Un număr de patru cifre, despărţit în două grupe de două cifre, dă două numere cu cifre identice şi este patratul unui număr cu cifre identice.

Să se găsească, care este acel număr fără a folosi tabelele de patrate perfecte.

O. N. Ţ.

E. G. 651. Să se găsească cel mai mic număr N astfel ca $N \equiv +1 \pmod{11}$; $N \equiv +7 \pmod{13}$; $N \equiv +7 \pmod{17}$.

O. N. Ţ.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . Lei 950

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a). . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1.000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 26.664

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 2 — 1 NOEMBRIE 1944

ABONAMENTUL LEI 300 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

BIBLIOTECA CENTRALĂ SIBIIU

DREAPTA LUI WALLACE-SIMSON

1°. **Triunghiu podar.** Fie M un punct situat în planul unui triunghiu ABC — A', B', C' proiecţiile punctului M pe laturile BC, CA, AB.

Triunghiul A'B'C' se numeşte *triunghiul podar al punctului* M.

In cazul când M se află pe cercul circumscris triunghiului ABC, cele trei laturi ale triunghiului podar sunt aşezate pe aceeaşi dreaptă, cum vom dovedi în cele ce urmează.

2°. **Teorema lui Wallace-Simson.** *Proiecţiile pe laturile triunghiului de referinţa ale unui punct al cercului circumscris sunt în linie dreaptă.*

Păstrăm notaţiile de mai sus, M fiind pe cercul ABC.

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle B'MC',$$

întru cât patrulaterele inscriptibile ABMC, AB'MC' au ca suplement $\sphericalangle BAC$. Rezultă

$$\sphericalangle BMC' = \sphericalangle B'MC.$$

Dar şi patrulaterele MA'BC', MA'B'C sunt inscriptibile, deoarece din A' şi C' se vede segmentul de dreaptă MB sub unghiuri drepte, iar din A' şi B' se vede segmentul de dreaptă MC sub unghiuri drepte. Deci

$$\sphericalangle BMC' = \sphericalangle BA'C',$$

$$\sphericalangle B'MC = \sphericalangle B'A'C.$$

Având în vedere egalitatea stabilită a unghiurilor BMC', B'MC, rezultă

$$\sphericalangle BA'C' = \sphericalangle B'A'C,$$

deci semidreptele A'C' şi A'B' sunt în prelungire.

3°. **Dreapta lui Wallace-Simson.** Dreapta A'B'C', obținută în teorema de mai sus se numește în unele cărți dreapta lui SIMSON *). Acest nume i-a fost atribuit de SERVOIS, cum observă TRAIAN LALESCU într'o notă publicată în *Gazeta Matematică* **). Dar descoperirea proprietății este datorită unui alt matematician englez, WILLIAM WALLACE ***), care a publicat-o în anul 1800. Vom numi această dreaptă importantă, pentru a uni obișnuința cu proprietatea, ca în titlul prezentei note.

4°. **Altă demonstrație a teoremei lui Wallace-Simson** ****). Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice BA'M, AB'M care au $\sphericalangle CBM = \sphericalangle CAM$, rezultă

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}.$$

De asemenea din perechile de triunghiuri asemenea (CB'M, BC'M), (AC'M, CA'M) rezultă

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}.$$

Multiplicând cele trei egalități, se găsește

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

și după reciproca teoremei lui MENELAUS cele trei puncte A', B', C' sunt în linie dreaptă.

5°. **Reciproca teoremei lui Wallace-Simson.** *Dacă proiecțiile unui punct pe laturile unui triunghiu sunt în linie dreaptă, punctul se găsește pe cercul cricumscris.*

In adevăr,

$$\sphericalangle BA'C' = \sphericalangle CA'B'$$

și cum, pentru motivele arătate la 2°

$$\sphericalangle BA'C' = \sphericalangle BMC' \quad , \quad \sphericalangle B'A'C = \sphericalangle B'MC,$$

rezultă

$$\sphericalangle BMC' = \sphericalangle B'MC.$$

---

*) ROBERT SIMSON (1687—1768), matematician englez. A trăit la *Glascow*.

**) *Gazeta Matematică*, Vol. XXI, p. 88.

***) WILLIAM WALLACE (1768—1843).

****) Dată de D-l A. SELAGIANU în *Gazeta Matematică*, Vol. XVI, p. 406.

Sau, adunând în ambele părți $\sphericalangle BMB'$,

$$\sphericalangle C'MB' = \sphericalangle BMC,$$

deci $$\sphericalangle BMC = 180^0 - A,$$

ceea ce arată ca patrulaterul ABMC este inscriptibil.

6°. **Direcția dreptei lui Wallace-Simson.** Să presupunem că punctul M se găsește pe arcul BC. Poziția punctului M pe cercul circumscris este definită de unghiul $BAM = \alpha$.

Din patrulaterul inscriptibil A'MCB' deducem

$$\sphericalangle B'A'C = \sphericalangle B'MC = 90^0 - \sphericalangle B'CM = 90^0 - (\sphericalangle BCM + \sphericalangle ACM)$$

$$= 90^0 - (\alpha + C).$$

Astfel s'a determinat direcția dreptei lui WALLACE-SIMSON prin unghiul pe care îl face această dreaptă cu latura corespunzătoare arcului în care se află punctul M.

7°. **Proprietate.** *Dreptele lui Wallace-Simson a două puncte diametral opuse sunt perpendiculare.*

Să notăm S intersecția celor două drepte care ne preocupă și N' proiecția lui N diametral opusul lui M, pe latura corespunzătoare arcului pe care se află, de exemplu pe AC.

In acest caz,

$$\sphericalangle SN'C = 90^0 - (\beta + C), \quad \text{unde} \quad \beta = \sphericalangle NBA.$$

Dar

$$\sphericalangle SN'B' + \sphericalangle SB'N' = \sphericalangle SN'B' + \sphericalangle B'A'C + \sphericalangle B'CA'$$

$$= 90^0 - (\beta + C) + 90^0 - (\alpha + C) + C = 180^0 - (\alpha + \beta + C).$$

Cum, notând P (AM, BN)

$$\alpha + \beta = 180^0 - \sphericalangle APB = 180^0 - (90^0 + C) = 90^0 - C,$$

rezultă

$$\sphericalangle SN'B' + \sphericalangle SB'N' = 90^0,$$

deci triunghiul SB'N' este dreptunghiu în S.

8°. **Proprietate.** *Dreapta lui Wallace-Simson a punctului* M *trece prin mijlocul segmentului determinat de* M *și de ortocentrul* H.

Fie A_1, A_2, D, E punctele în care înălțimea AH taie latura BC, cercul circumscris, dreapta lui WALLACE-SIMSON și paralela din M la BC.

$$\sphericalangle A_2MA' = 180^0 - \sphericalangle AA_2M = 180^0 - (B + A - \alpha)$$

$$\therefore \quad \sphericalangle A_2MA' = \alpha + C.$$

Dar $\quad \sphericalangle DA'M = 90^0 - \sphericalangle BA'C' = \alpha + C.$

Deci $\quad \sphericalangle A_2MA' = \sphericalangle DA'M,$

iar trapezul $MA'DA_2$ este isoscel. Rezultă

$$\overline{A'D} = \overline{A_2M} \quad , \quad \text{deci} \quad \overline{A_1D} = \overline{A_2E}$$

și cum se știe că

$$\overline{HA_1} = \overline{A_1A_2}\ ^*) \quad , \quad \overline{HD} = \overline{A_1E} = \overline{A'M},$$

deci patrulaterul MA'HD este paralelogram, de unde rezultă că DA', dreapta lui WALLACE-SIMSON trece prin mijlocul segmentului MH.

Observare. Punctul în care dreapta lui WALLACE-SIMSON a punctului M taie dreapta MH, se află pe cercul lui EULER, pentrucă este omoteticul unui punct al cercului circumscris, într'o omotetie de centru H și raport $\frac{1}{2}$ *) .

9°. **Proprietate.** *Dreptele lui Wallace-Simson a două puncte diametrul opuse se întâlnesc pe cercul lui Euler.*

Fie M, N cele două puncte diametral opuse. Dreptele lui WALLACE-SIMSON trec prin mijloacele segmentelor $\overline{MH}$, $\overline{NH}$, situate pe cercul lui EULER.

Cum $\qquad \overline{M_1N_1} = \frac{1}{2}\overline{MN} = R,$

punctele M_1, N_1 sunt diametral opuse în cercul lui EULER și cum unghiul M_1SN_1 este drept, S se află pe cercul lui EULER.

10°. **Generalizarea dreptei lui Wallace-Simson.** *Dacă dintr'un punct al cercului circumscris se duc drepte care fac același unghiu* φ *cu laturile* BC, AC BA *ale triunghiului de referință, se obțin pe aceste laturi trei puncte colineare:*

Demonstrația se face ca la punctele 2° și 4°.

---

*) A se vedea (3°), (4°) nota despre *Cercul lui* EULER, apărută în numărul trecut.

Teorema admite şi reciprocă.

11°. **Cazuri particulare:** a) *Dreapta lui Wallace-Simson a punctului în care o înălţime taie cercul circumscris este antiparalelă cu latura triunghiului de referinţă corespunzătoare înălţimii, în unghiul opus.*

Păstrând notaţiile folosite la punctul 2°, M fiind întâlnirea înălţimii vârfului A cu cercul circumscris

$$\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle BMA = \sphericalangle BCA.$$

b) *Dreapta lui Wallace-Simson a punctului în care o bisectoare taie cercul circumscris este perpendiculară pe acea bisectoare.*

Păstrând notaţiile folosite la punctul 2°, M fiind întâlnirea bisectoarei vârfului A cu cercul circumscris,

$$\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle BMA' = 90^0 - \sphericalangle CBM = 90^0 - \frac{A}{2},$$

$$\sphericalangle AB'C' = 90^0 - \sphericalangle A'B'M = 90^0 - \sphericalangle A'CM = 90^0 - \frac{A}{2}.$$

Deci $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle AB'C'$

triunghiul AC'B' este isoscel, iar bisectoarea vârfului A este şi înălţime.

C. IONESCU-BUJOR.

REZULTATUL CONCURSULUI DE MECANICĂ

Examinându-se soluţiile primite, se acordă:

Premiul I în valoare de 2.000 (două mii) lei elevului

GÂŢĂ GHEORGHE, clasa a VIII-a liceul „Tudor Vladimirescu", Tg.-Jiu.

Premiul II în valoare de 1.000 (una mie) lei elevului

GAŞA D. CORNELIU, clasa a VIII-a liceul „Tudor Vladimirescu", Tg.-Jiu.

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 580. Dacă* A *şi* B *sunt două numere amice, iar* s (*i*) *suma divizorilor lui* i, *atunci avem:*

$$[s(A)]^2 + [s(B)]^2 = 2[A \cdot s(A) + B : s(B)].$$

I. L.

După definiţia numerelor amice, avem:

$$s(A) = s(B) = A + B.$$

Deci:

$$[s(A)]^2 = [s(B)]^2 = (A + B)^2.$$

Apoi:

$$2[A \cdot s(A) + B \cdot s(B)] = 2(A + B)^2.$$

E. G. 583. Dacă r_i *reprezintă rădăcinile primitive ale numărului* p, *unde* $i = 1, 2, 3, \ldots n$, *atunci avem:*

$$\sum_1^n r_i^{\frac{p-1}{2}} = Mp - n \quad \text{şi} \quad \prod_1^n r_i^{\frac{p-1}{2}} = Mp + (-1)^n.$$

I. L.

Ştim că: $r_i^{\frac{p-1}{2}} = M_p - 1$, adunând sau înmulţind pentru $i = 1, 2, \ldots n$, obţinem relaţiile din problemă.

E. G. 584. Indicatorul unui număr poate fi proporţional cu indicatorul altui număr?

I. L.

Dacă A şi B sunt două numere date, întregi şi pozitivi şi k un întreg pozitiv, atunci ar trebui să avem:

$$\varphi(A) = k \cdot \varphi(B).$$

Dacă avem:

$$\varphi(A) = a^{\alpha-1} \cdot b^{\beta-1} \ldots (a-1)(b-1) \ldots$$

Atunci se observă bine că putem lua B egal cu o parte din factorii produsului dat grupaţi astfel: $a^{\alpha-1}(a-1)$, sau $b^{\beta-1}(b-1)$, etc...., iar k va fi altă parte.

In general dacă B este prim cu Q, şi dacă: $A = Q \cdot B$, atunci:

$$\varphi(A) = \varphi(Q) \cdot \varphi(B).$$

Deci punând $k = \varphi(Q)$, rezultă un răspuns afirmativ. Factorul de proporţionalitate este deci un indicator şi el.

E. G. 585. Să se arate că puterea n^a *a indicatorului unui număr este inferioară indicatoru ui puterii* n *a acelui număr.*

I. L.

Avem după enunţ:

$$[\varphi(N)]^n < \varphi[N^n].$$

Ori ştim că:

$$\varphi(N) < N \quad \text{deci} \quad [\varphi(N)]^{n-1} < N^{n-1}$$

sau:

$$[\varphi(N)]^n < N^{n-1} \cdot \varphi(N) = \varphi(N^n).$$

E. G. 586. Dacă $\varphi_x(y)$ *reprezintă indicatorul de ordinul* x *a lui* y, *atunci avem:*

$$\varphi_{n-1}(N) > 2\,\varphi_n(N).$$

I. L.

Avem pentru N par: $\varphi(N) \leqslant \frac{1}{2} N$, deci:

$$\varphi_2(N) \leqslant \frac{1}{2} \varphi_1(N)$$

$$\varphi_3(N) \leqslant \frac{1}{2} \varphi_2(N)$$

. . . . . .

$$\varphi_n(N) \leqslant \frac{1}{2} \varphi_{n-1}(N).$$

Până la 1 Octombrie 1944 s'au primit soluții bune dela:

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș-Bihor.

Clasa a VI-a: Moldovan I. M. (VI: 825, 6, 30).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa a VII-a: Soare V. M. (VII: 788, 9, 91, 4, 6, 8, 9, E. G.: 632, 7, 9, 40).

Liceul „Aurel Vlaicu", București.

Clasa a VII-a: Leon A. M. (VII: 744, E. G.: 593).

Liceul „Matei Basarab", București.

Clasa a VII-a: Muntz M. E. (VII: 745, 6, 7, 8, 9, E. G.: 593, 5).
Clasa a VIII-a: Antonescu D. E. (VIII: 672, 4, 5, 84, 5, 6, 7, E. G.: 615).

Liceul „Spiru Haret", București.

Clasa a VIII-a: Prassa G. C. (VIII: 670, 2, 3, 4, 5).

Colegiul Național „Carol I", Craiova.

Clasa a V-a: Dumitrescu A. P. (V: 799, 815, 7, 25).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa a VII-a: Popovici I. Ileana (VII: 747, 8, 9).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploiești.

Clasa a IV-a: Iosifescu M. (IV: 702, 3, 5, V: 830, 5, 7, 8), Stavrică M. (IV: 702, 3, V: 837).
Clasa a VII-a: Constantinescu R. M. (VII: 787, VIII: 697, 9, 700, 1, 2, 3, 4, E. G.: 623).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa a VI-a: Brașoveanu G. (VI: 827, VII: 745, E. G.: 595, 615).

Liceul Vârșeț.

Clasa a V-a: Malița P. G. (V: 799, 810, 3, 5, 9, 20).
Clasa a VIII-a: Tofanu I. T. (VIII: 663, 4, 5, 70, 1, 2, 5).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Februarie 1945

Clasa a III-a. *Exerc. 267.* Se dă un patrulater oarecare ABCD şi se ia faţă cu fiecare vârf simetricele celorlalte trei vârfuri. Fie B_a, C_a, D_a simetricele vârfurilor B, C, D faţă de A; A_b, C_b, D_b ale vârfurilor A, C, D faţă de B; A_c, B_c, D_c ale vârfurilor A, B, D faţă de C şi A_d, B_d, C_d ale vârfurilor A, B, C faţă de D. Să se arate, că diferenţa perimetrelor exagoanelor $D_aD_bD_cB_cB_dB_a$ şi $C_bC_aC_dA_dA_cA_b$ este egală cu îndoitul diferenţei diagonalelor patrulaterului dat.

O. N. Ţ.

III. 268. Fie triunghiul oarecare ABC; A', B', C' picioarele înălţimilor lui $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$; M şi N punctele unde dreapta B'C' taie a doua oară respectiv cercurile AA'B şi AA'C. Să se arate, că punctele M şi N sunt simetricele punctului A' în raport cu laturile AB şi AC.

O. N. Ţ.

III. 269. Fie triunghiul oarecare ABC; A', B', C' picioarele înălţimilor lui $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$. Cercul descris pe $\overline{AA'}$ ca diametru taie laturile AB şi AC respectiv în D şi E, iar dreptele A'D şi A'E taie pe B'C' în M şi N respectiv. Să se arate, că punctele M şi N sunt simetricele punctului A' în raport cu laturile AB şi AC.

O. N. Ţ.

Clasa a IV-a. *Exerc. 711.* Să se arate, că expresia

$$E \equiv 2(x-y)^2(z-x)^2 + 2(y-z)^2(x-y)^2 + 2(z-x)^2(y-z)^2 - (x-y)^4 - (y-z)^4 - (z-x)^4$$

este nulă oricare ar fi x, y, z.

O. N. Ţ.

IV. 712. Să se verifice identitatea

$$(a-b-1)^2 + (b-a-1)^2 + (1-a-b)^2 + (a+b+1)^2 \equiv 4(a^2+b^2+1).$$

I. L.

IV. 713. Să se verifice identitatea

$$(a^2+b^2-ab-a-b+1)^2 \equiv (a-b)^2(a-1)^2 + (a-b)^2(b-1)^2 + (a-1)^2(b-1)^2.$$

I. L.

IV. 714. Să se strângă expresiile

$$E \equiv a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2c^2(a^2+b^2)$$

$$E' \equiv a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2a^2(b^2+c^2)$$

$$E'' \equiv a^4+b^4+c^4+2a^2c^2-2a^2b^2-2b^2c^2.$$

O. N. Ţ.

Clasa a V-a. *Exerc. 845.* Să se determine constantele a şi b astfel ca polinomul

$$P(x) \equiv a(x-5)^2(5x+16)+b(x-12)(7x-19)^2$$

să se împartă exact cu produsul $(x-1)(x-3)$.

I. I. S.

V. 846. Să se arate, că expresia

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)-(xy+xz+yz-1)^2$$

se împarte exact cu

$$x+y+z-xyz$$

şi să se determine câtul.

I. I. S.

V. 847. Să se determine parametrul m astfel încât polinomul

$$P(x) \equiv 2x^3-x^2+mx+1$$

împărţit prin (x^2-m) să dea restul $(9x-2)$.

I. L.

V. 848. Fie triunghiul oarecare ABC. Perpendiculara la mijlocul M pe AB taie pe AC în M', iar perpendiculara la mijlocul N pe AC taie pe AB în N'. Să se arate, că punctele B, N', C, M' sunt pe acelaşi cerc.

O. N. Ţ.

V. 849. In vârful B al triunghiului ABC se ridică o perpendiculară pe latura AB. Pe această perpendiculară se iau punctele B_1, B_2 aşa încât $\overline{BB_1} = \overline{BB_2} = \overline{AC}$, punctul B_1 fiind de aceeaşi parte a lui AB ca şi C. In mod analog, se construesc punctele C_1, C_2 pe perpendiculara în C pe AC aşa încât $\overline{CC_1} = \overline{CC_2} = \overline{AB}$, C_1 fiind de aceeaşi parte a lui AC ca şi B. Să se arate, că, dacă B_1, C_1 se confundă, sau dacă B_2, A, C_2 sunt colineare, atunci unghiul M este drept şi *reciproc.*

GH. B.

Clasa a VI-a. *Exerc. 860.* Să se simplifice fracţia

$$\frac{ab\sqrt{ab} - (a-b)\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{ab\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{ab}\right) - (a-b)\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{ab}\right)}$$

I. I. S.

VI. 861. Să se arate, că

$$\operatorname{tg} 10^0 = \frac{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} 20^0}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} 20^0} \quad ; \quad \operatorname{tg} 20^0 = \frac{1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 10^0}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} 10^0}.$$

I. I. S.

VI. 862. Să se arate, că

$$\frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{4} - 2\sin\frac{a}{4}}{\sin\frac{a}{2} - 2\sin\frac{a}{4}} = 2\cos^2\frac{a}{8}.$$

I. I. S.

VI. 863. Să se arate, că

$$\sin^2 x \cdot \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \cos x = \cos^2 x + \sin x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 - \sin x \cos x \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

I. I. S.

VI. 864. Ştiind că $\sin a > \cos a$, cum stă $\sin 2a$ faţă de $\cos 2a$?

I. L.

VI. 865. Cunoscând că $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = m$, să se determine $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$.

I. L.

Clasa a VII-a. *Exerc. 808.* Să se rezolve ecuaţia

$$(a+2)\,C_{n-1}^{m-1} + (a+1)\,C_{n-1}^{m} = a\,C_n^m,$$

m şi n fiind numere date, C_p^r simbolul combinărilor.

C. I. B.

VII. 809. Să se rezolve sistemul

$$x\,C_{n-2}^{m-1} + \frac{n-1}{m-1}\,y = \frac{m}{n-1}, \quad x\,C_{n-2}^{m-2} - \frac{n-1}{m}\,y = \frac{m-1}{n-1},$$

m, n numere întregi pozitive date, C_p^r simbolul combinărilor.

C. I. B.

VII. 810. Să se calculeze determinantul

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & a(b-c) & a^2(b-c) \\ 1 & b(c-a) & b^2(c-a) \\ 1 & c(a-b) & c^2(a-b) \end{vmatrix}$$

punând rezultatul sub formă de produs.

I. I. S.

VII. 811. Să se arate, că determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & -b(c^2-1) & a(c^2-1) \\ b(a^2-1) & b^2-c^2 & -c(a^2-1) \\ -a(b^2-1) & c(b^2-1) & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

este nul.

I. I. S.

VII. 812. Trei termeni constructivi ai desvoltării

$$(x+a)^n$$

au coeficienţii binomiali proporţionali cu 20, 65, 156.

Să se determine n.

N. M.

VII. 813. Un termen al desvoltării

$$(x+3)^n$$

are coeficientul 110565 şi coeficientul binomial 1365.

Să se afle n şi rangul termenului.

N. M.

VII. 814. Să se rezolve ecuaţia

$$11\ C_x^{22} = 300\ C_{x-2}^{21}.$$

N. M.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 716.* Intr'un triunghiu ABC sunt cunoscute lungimile laturilor

$$\overline{AB} = c\ ,\ \overline{BC} = a\ ,\ \overline{CA} = b.$$

Se ia un sistem de axe rectangulare având origina în vârful A şi axa absciselor AX pe dreapta determinată de A şi de centrul O al cercului ABC (sensul pozitiv fiind dela A către O).

Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului ABC şi ale triunghiurilor *ortic* (**) şi *complementar* (*).

C. I. B.

VIII. 717. Un triunghiu echilateral are două din vârfuri de coordonate (2, 0) şi (1, 3). Să se arate, că al treilea vârf este situat pe una din dreptele

$$x - y = \pm\sqrt{3}.$$

N. M.

---

*) Triunghiul format de picioarele medianelor triunghiului ABC.

**) A se vedea nota *Cercul lui* EULER din *Nr. 1.*

VIII. 718. Un triunghiu isoscel de latură $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{10}$ are vârful A de coordonate (2, 0), vârful B pe dreapta $x = 1$ şi vârful C pe dreapta $x = 3(y - 1)$. Să se verifice, că printre triunghiurile, care răspund problemei, sunt şi triunghiuri echilaterale.

N. M.

VIII. 719. Fie A, B, C, D, D' cinci puncte pe o dreaptă şi C' conjugatul armonic al lui C faţă de A şi B. Avem:

(1) $(ABCD) + (ABC'D) = 0$

(2) $(ABDD') = (ABCD') : (ABCD).$

N. M.

VIII. 720. Fie A, B, C, D, D' cinci puncte pe o dreaptă şi

$$(ABCD) = \rho \quad , \quad (ABCD') = \rho'.$$

Avem relaţia

$$\overline{AC} \cdot \overline{D'D} = \overline{BC}\,[\rho \cdot \overline{AD} - \rho' \cdot \overline{AD'}].$$

N. M.

VIII. 721. Fie A, B, C, D patru puncte pe o dreaptă şi O un punct arbitrar al dreptei. Fie $\overline{OG}$ media ponderată a segmentelor $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ de ponderi α, β, γ, δ. Fie încă M_1, M_2, M_3 punctele dreptei pentru care

$$\alpha \cdot \overline{MA}^3 + \beta \cdot \overline{MB}^3 + \gamma \cdot \overline{MC}^3 + \delta \cdot \overline{MD}^3 = 0$$

şi I centrul de greutate al punctelor M_1, M_2, M_3.

Avem:

$$\overline{OI} = 3 \cdot \overline{OG}.$$

N. M.

VIII. 722. Ştiind că α, β, γ, δ sunt rădăcinile întregi ale polinomului $P(x)$ de gradul al patrulea, să se arate, că produsul

$$\pi_{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)(\alpha - 4)$$

este divizibil cu 24^4 şi să se exprime valoarea acestui produs.

O. N. Ţ.

Exerciţii Generale. *Exerc. 652.* Suma patratelor a două numere impare nu poate să fie un patrat; ea este divizibilă cu 2, dar nu cu 4.

I. L.

E. G. 653. Dacă x, y, z satisfac ecuaţia lui PITAGORA

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

atunci suma

$$(z - x)^2 + (z - y)^2$$

nu poate să fie primă.

I. L.

E. G. 654. Dacă x, y, z sunt trei numere pitagorice (adică între ele avem relaţia $x^2 + y^2 = z^2$), atunci produsul

$$2(z \pm x)(z \pm y)$$

este patrat perfect.

I. L.

E. G. 655. Dacă x, y, z sunt trei numere pitagorice, atunci suma

$$(z - x)^2 + y^2 + zx$$

reprezintă dublul unui patrat perfect.

I. L.

E. G. 656. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$7x + 3y = 0.$$

I. L.

E. G. 657. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$7x + 3y + z = 0.$$

I. L.

E. G. 658. Să se rezolve în numere întregi sistemul de ecuaţii

$$7x + 3y = 0 \quad ; \quad 5y + z = 0.$$

I. L.

E. G. 659. Să se rezolve în numere întregi sistemul de ecuații

$$7x + 3y + z = 0 \quad ; \quad 8x + 3y + 2z = 0.$$

I. L.

E. G. 660. Să se rezolve în numere întregi sistemul de ecuații

$$x + y + z = 0 \quad ; \quad y + 2z + t = 0 \quad ; \quad z + 3t + v = 0.$$

I. L.

E. G. 661. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$7x + 3y = 10.$$

I. L.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 3 1 DECEMBRIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3803

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XI. No. 3 — 1 DECEMBRIE 1944

ABONAMENTUL LEI 300 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

TEOREMA LUI CEVA

1°. **Proiecţia cilindrică a unui punct.** Fie un punct M, un plan P şi o dreaptă D neconţinută în plan. Paralela, dusă prin M dreptei D, întâlneşte planul în M'.

M' se numeşte *proiecţia punctului* M *pe planul* P, *după direcţia* D.

Acest fel de proiecţie a punctelor spaţiului pe un plan se numeşte *proiecţie cilindrică.*

2°. **Proiecţia unei drepte.** *Proiecţia unei drepte pe un plan, după o direcţie dată, este o dreaptă.*

Pentru a dovedi această proprietate, va fi de ajuns să arătăm că fiind date trei puncte L, M, N în linie dreaptă, proiecţiile lor L', M', N' pe planul P, după direcţia D, sunt de asemenea în linie dreaptă.

Planele determinate de dreptele (LL', MM'), (MM', NN') având comune două drepte LMN, MM' sunt confundate într'un singur plan, pe a cărui dreaptă de întâlnire cu planul P se află L', M', N'.

3°. **Păstrarea raportului.** *Proiecţia cilindrică păstrează raportul a două segmente situate pe o dreaptă.*

Fie A, B, C, E patru puncte pe o dreaptă şi A', B', C', E' proiecţiile lor pe planul P, făcute paralel cu dreapta D. Dreptele ABCE, A'B'C'E' sunt situate în acelaşi plan, deci împărţite în segmente proporţionale de paralelele AA', BB', CC', EE' adică

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'E'}}.$$

4°. **Segmente pe o dreaptă orientată.** Fie A, B două puncte pe o dreaptă. Există două sensuri de mişcare de dreaptă: un sens dela A către B, alt sens dela B către A.

Unul dintre aceste sensuri se numeşte *sensul pozitiv*, celălalt se numeşte *sensul negativ*. Să presupunem că am ales sensul $A \rightarrow B$ ca sens pozitiv.

Dreapta pe care s'a determinat sensul pozitiv se numeşte *dreaptă orientată*.

Sensul pe un segment $\overline{MN}$ al unei drepte este sensul dela capătul segmentului notat cu prima literă, la celălalt capăt.

Când sensul unui segment situat pe o dreaptă orientată coincide cu sensul pozitiv al dreptei, mărimea segmentului este pozitivă, altfel mărimea segmentului este negativă.

In cazul considerat mai sus, mărimea segmentului AB este pozitivă, mărimea segmentului BA este negativă.

B, A', C fiind trei puncte pe o dreaptă, astfel ca A' să fie cuprins între B şi C, raportul

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} < 0,$$

pentrucă segmentele $\overline{A'B}$, $\overline{A'C}$ au sensuri diferite.

5⁰. **Teorema lui Ceva** *). Fie ABC triunghiul de referinţă, AA', BB', CC' înălţimile triunghiului, concurente în ortocentrul H. Din asemănarea triunghiurilor AA'B, CC'B rezultă

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}.$$

Analog se deduce

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}.$$

Multiplicând cele trei egalităţi se găseşte că produsul

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

are valoarea absolută 1.

---

*) JEAN CÉVA, matematician milanez. A trăit în secolul XVII.

Dacă triunghiul ABC are toate unghiurile ascuțite, toate rapoartele sunt negative, dacă un unghiu este obtus, un singur raport este negativ, încât având în vedere semnele,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Proiectând figura cilindric pe un plan P, ortocentrul H devine un punct oarecare M al planului, rapoartele se păstrează și păstrând aceleași notații pentru noul triunghiu din planul P și picioarele dreptelor AM, BM, CM, se poate enunța următoarea teoremă a lui CEVA:

In triunghiul ABC, AA', BB', CC' *fiind trei drepte concurente, există relația*

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

6°. **Ceviană.** Se numește *ceviană* sau *transversală unghiulară* o dreaptă care trece prin vârful triunghiului de referință.

Astfel înălțimile unui triunghiu sunt trei ceviene concurente.

Mai există în triunghiu și alte ceviene remarcabile, concurente. Reciproca teoremei lui CEVA, pe care o vom dovedi, permite demonstrarea concurenței a trei ceviene ale unui triunghiu.

7°. **Reciproca teoremei lui Ceva.** *Într'un triunghiu* ABC, *cevienele* AA', BB', CC' *duse astfel ca*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1,$$

sunt concurente.

In adevăr, notând M intersecția cevienelor BB', CC', A'' intersecția dreptei AM cu BC, după teorema lui CEVA,

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1,$$

și comparând cu relația ipotezei, deducem

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}},$$

deci A', A'' sunt confundate, iar ceviana AA' trece prin M.

8°. **Forma trigonometrică a relației lui Ceva.** Relația între cele șase segmente determinate de trei ceviene concurente AA', BB', CC' pe laturile respective ale triunghiului ABC se poate înlocui prin o altă relație între sinusurile celor șase unghiuri formate de ceviene cu laturile alăturate.

Din triunghiurile ABA', ACA' se deduce

$$\overline{A'B} = \frac{\overline{AB}}{\sin AA'B} \sin A'AB \quad , \qquad \overline{A'C} = \frac{\overline{AC}}{\sin AA'C} \sin A'AC,$$

deci

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\sin A'AB}{\sin A'AC}.$$

Analog,

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\sin B'BC}{\sin B'BA} \quad , \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\sin C'CA}{\sin C'CB}.$$

Multiplicând cele trei egalități, simplificând, se găsește

$$\frac{\sin A'AB}{\sin A'AC} \cdot \frac{\sin B'BC}{\sin B'BA} \cdot \frac{\sin C'CA}{\sin C'CB} = -1.$$

9°. **Aplicații.** Dacă A', B', C' sunt mijloacele laturilor triunghiului de referință,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -1 \quad , \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1 \quad , \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

și relația lui CEVA este verificată. Deci *medianele triunghiului sunt concurente.*

Dacă A', B', C' sunt picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC,

$$\sphericalangle A'AB = -\sphericalangle A'AC$$

deci

$$\frac{\sin A'AB}{\sin A'AC} = -1.$$

Analog,

$$\frac{\sin B'BC}{\sin B'BA} = -1 \quad , \quad \frac{\sin C'CA}{\sin C'CB} = -1,$$

relația lui CEVA este verificată, deci *bisectoarele sunt concurente.*

10°. **Punctul lui Gergonne*).** Fie A', B', C' punctele de contact ale laturilor triunghiului de referință cu cercul înscris

$$\overline{BA'} = \overline{B'C}$$

ca tangente duse din B la cerc. Analog

$$\overline{CA'} = \overline{CB'} \quad , \quad \overline{AB'} = \overline{AC'}$$

şi astfel relația lui CEVA este verificată.

Cevienele care trec prin punctele de contact ale cercului înscris se întâlnesc într'un punct N, *numit punctul lui* GERGONNE.

11°. **Punctul lui Nagel**).** Fie A', B', C' punctele de contact ale cercurilor exînscrise cu laturile BC, CA, AB. Notând B_1, C_1 punctele în care prelungirile laturilor AB, AC întâlnesc cercul exînscris corespunzător laturii BC, notând

$$\overline{BC} = a \quad , \quad \overline{CA} = b \quad , \quad \overline{AB} = c$$

şi p semiperimetrul triunghiului, avem

$$\overline{AB_1} = \overline{AC_1}$$

ca tangente din A la cerc,

$$\overline{BB_1} = \overline{BA'} \quad , \quad \overline{CC_1} = \overline{CA'}, \text{ pentru acelaşi motiv.}$$

Deci, cum

$$\overline{AB_1} = \overline{AB} + \overline{BB_1} = \overline{AB} + \overline{A'B} \quad , \quad \overline{AC_1} = \overline{AC} + \overline{CC_1} = \overline{AC} + \overline{A'C},$$

$$\overline{AB} + \overline{A'B} = \overline{AC} + \overline{A'C} = p.$$

Rezultă,

$$\overline{A'B} = p - c \quad , \quad \overline{A'C} = p - b$$

şi, având în vedere sensul,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{p-c}{p-b}.$$

---

*) GERGONNE, matematician francez, rector al Universității din Montpellier, a publicat o importantă revistă matematică (Analele lui GERGONNE), mort la 1859.

**) NAGEL (1803—1882), rectorul şcoalei reale din Ulm.

Analog

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{p-a}{p-c}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{p-b}{p-a},$$

de unde

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Cevienele AA', BB', CC' sunt concurente.

Cevienele ce trec prin punctele de contact ale laturilor triunghiului de referință cu cercurile exînscrise, se întâlnesc într'un punct, numit punctul lui NAGEL.

12°. **Puncte izotomice.** *Două puncte situate pe o latură a triunghiului de referință, simetrice în raport cu mijlocul laturii, se numesc puncte izotomice.*

Cevienele corespunzătoare se numesc *ceviene izotomice.*

13°. **Puncte reciproce.** *Dacă trei ceviene sunt concurente într'un punct* M, *izotomicele lor se întâlnesc într'un punct* N, *numit reciprocul lui* M.

Fie A', B', C' picioarele cevienelor punctului M şi A", B", C" picioarele cevienelor izotomice. Avem

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{A''C}}{\overline{A''B}}, \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{B''A}}{\overline{B''C}}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{C''B}}{\overline{C''A}}.$$

Dar după teorema lui CEVA,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1,$$

deci

$$\frac{\overline{A''C}}{\overline{A''B}} \cdot \frac{\overline{B''A}}{\overline{B''C}} \cdot \frac{\overline{C''B}}{\overline{C''A}} = -1$$

sau, inversând rapoartele,

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -1.$$

14°. **Exemplu de puncte reciproce.**

A', B', C' fiind punctele de contact ale cercurilor exînscrise cu laturile triunghiului de referință, am arătat că

$$\overline{A'B} = p - c, \quad \overline{A'C} = p - b.$$

Notând A″, B″, C″ punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului de referinţă,

$$\overline{A''B} + \overline{A''C} = a \quad , \quad \overline{B''C} + \overline{B''A} = b \quad , \quad \overline{C''A} + \overline{C''B} = c,$$

adunăm şi cum

$$\overline{A''B} = \overline{C''B} \quad , \quad \overline{A''C} = \overline{B''C} \quad , \quad \overline{C''A} = \overline{B''A},$$

rezultă

$$\overline{A''B} + \overline{B''C} + \overline{B''A} = p,$$

deci

$$\overline{A''B} = p - b \quad \therefore \quad \overline{A''B} = \overline{A'C}.$$

Aşa dar, cevienele AA′, AA″, adică cevienele punctelor lui GERGONNE şi NAGEL sunt izotomice.

Punctele lui GERGONNE *şi* NAGEL *sunt reciproce.*

C. IONESCU-BUJOR.

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 588. Dacă* $\pi(i)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* i *şi mai mici ca el, atunci avem:*

$$[\pi(A \,.\, N)]^2 - [\pi(B \,.\, N)]^2 = \mathcal{M}N.$$

I. L.

Avem:

$$[\pi(A \,.\, N)]^2 - 1 = \mathcal{M}N \quad \text{şi} \quad [\pi(B \,.\, N)]^2 - 1 = \mathcal{M}N.$$

E. G. 589. Să se arate că:

$$\sum_{1}^{N} [\pi(i \,.\, N)]^2 = \mathcal{M}N$$

unde $\pi(x)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* x *şi mai mici ca el.*

I. L.

Avem:

$$[\pi(i \,.\, N)]^2 - 1 = \mathcal{M}N.$$

Adunând pentru $i = 1, 2, 3, \ldots N$ obţinem relaţia cerută.

E. G. 590. Să se arate că, dacă $p_1, p_2, \ldots p_n$ *reprezintă primele* n *numere prime, atunci se poate găsi o serie de valori pentru* i, *în funcție de* n, *pentru care avem:*

$$p_n > i - n.$$

I. L.

In adevăr, folosind o tablă de numere prime, avem:

n	$1 \to 7$	$8 \to 16$	$17 \to 35$	$36 \to 78$	$79 \to 190$	$191 \to 447$	$448 \to 1060$
p_n (maxim)	13	47	139	389	1129	3121	8467
i	1	2	3	4	5	6	7

și tot așa mai departe i crește.

E. G. 591. Dacă $p_1, p_2, \ldots p_n$ *reprezintă primele* n *numere prime și dacă avem* $p_n > i \,.\, n$, *atunci vom avea și:*

$$p_{n+k} \geqslant i \,.\, n + 2k.$$

I. L.

In adevăr:

$$p_{n+1} \geqslant i_{n+2} \quad ; \quad p_{n+2} \geqslant p_{n+1} + 2 > i \,.\, n + 2 \,.\, 2.$$

Și tot așa mai departe, avem:

$$p_{n+k} > i \,.\, n + 2k.$$

E. G. 592. Să se arate că oricare ar fi α *întreg și pozitiv, avem:*

$$\frac{2^{\alpha-1}!}{3^{\alpha-1}!} \cdot \frac{2^{2^{\alpha-1}}}{3^{3^{\alpha-1}}} > \frac{2^{\alpha}!}{3^{\alpha}!}.$$

I. L.

Dacă $\pi(i)$ reprezintă produsul numerelor prime cu i și mai mici ca el, atunci:

$$\pi(3^{\alpha}) = \frac{3^{\alpha}!}{3^{\alpha-1}!\ 3^{3^{\alpha-1}}} \quad \text{și} \quad \pi(2^{\alpha}) = \frac{2^{\alpha}!}{2^{\alpha-1}!\ 2^{2^{\alpha-1}}}.$$

Apoi știm că $\pi(3^{\alpha}) > \pi(2^{\alpha})$, deoarece avem:

$$\frac{(3^{\alpha-1}+1)\,3^{\alpha-1}+2)\ldots(3^{\alpha})}{3^{3^{\alpha-1}}} > \frac{(2^{\alpha-1}+1)\,(2^{\alpha-1}+2)\ldots(2^{\alpha})}{2^{2^{\alpha-1}}}.$$

In produsul din primul membru avem: $2.3^{\alpha-1}$ factori consecutivi şi în al doilea: $2^{\alpha-1}$.

Dacă admitem acum că toţi factorii din primul membru sunt egali cu $3^{\alpha-1}$, deci mai mic decât cel mai mic, care este $(3^{\alpha-1}+1)$ şi dacă admitem, de asemenea, că toţi factorii din al doilea membru sunt egali cu 2^{α}, adică cu cel mai mare, atunci observăm că:

$$\frac{(3^{\alpha-1})^2 \cdot 3^{\alpha-1}}{3^{3^{\alpha-1}}} > \frac{(2^{\alpha})^{2^{\alpha-1}}}{2^{2^{\alpha-1}}}.$$

Deoarece prin simplificări avem:

$$3^{(2\alpha-3)} \cdot 3^{\alpha-1} > 2^{(\alpha-1)} \cdot 2^{\alpha-1}.$$

Or, observăm că pentru $\alpha > 1$ exponentul din primul membru este mai mare decât cel din al doilea membru.

E. G. 596. Dacă x, y, z *sunt numere întregi şi pozitive, atunci avem:*

$$2E\left(\frac{y}{z}\right) \leqslant E\left(\frac{x+y}{z}\right) - E\left(\frac{x-y}{z}\right)$$

unde E (*i*) *înseamnă întregii cuprinşi în* i.

I. L.

Avem:

$$E\left(\frac{x+y}{z}\right) = E\left(\frac{x}{z}\right) + E\left(\frac{y}{z}\right) + \varepsilon_1$$

$$E\left(\frac{x-y}{z}\right) = E\left(\frac{x}{z}\right) - E\left(\frac{y}{z}\right) - \varepsilon_2$$

unde $\varepsilon_{1,2} = 0$ sau 1.

Scăzând, obţinem:

$$E\left(\frac{x+y}{z}\right) - E\left(\frac{x-y}{z}\right) = 2E\left(\frac{y}{z}\right) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

unde $0 \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant 2$.

E. G. 597. Dacă a *şi* b *sunt două numere întregi pozitive avem:*

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot E\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \sum_1^n E\left(\frac{i \cdot a}{b}\right)$$

unde E (*i*) *reprezintă întregii lui* i.

I. L.

Ştim că:

$$E\left(\frac{i \cdot a}{b}\right) = i \cdot E\left(\frac{a}{b}\right) + \sum_1^i \varepsilon_i$$

deoarece se deduce din adunarea relaţiilor:

$$E\left(\frac{i \cdot a}{b}\right) = E\left(\frac{a}{b}\right) + E\left[\frac{(i-1)\,a}{b}\right] + \varepsilon_1$$

$$E\left[\frac{(i-1) \cdot a}{b}\right] = E\left(\frac{a}{b}\right) + E\left[\frac{(i-2)\,a}{b}\right] + \varepsilon_2$$

. . . . . .

$$E\left(\frac{2a}{b}\right) = E\left(\frac{a}{b}\right) + E\left(\frac{a}{b}\right) + \varepsilon_{i-1}$$

$$E\left(\frac{a}{b}\right) = E\left(\frac{a}{b}\right).$$

Cum avem: $0 \leqslant \sum_1^i \varepsilon_i$, urmează că făcând în prima relaţie $i = 1, 2, \ldots n$ şi adunând obţinem condiţia din enunţ.

E. G. 599. Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$E\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \quad ; \quad E\left(\frac{2x}{y}\right) = 7$$

unde E (*i*) *înseamnă întregii lui* i.

I. L.

Avem:

$$E\left(\frac{2x}{y}\right) = 2E\left(\frac{x}{y}\right) + \varepsilon = 7 \quad \text{deci} \quad \varepsilon = 1.$$

Cum: $x = 3y + \tau_1$ şi $2x = 7y + \tau_2$, unde avem: $0 \leqslant \tau_1 < y$ şi $0 \leqslant \tau_2 < y$, deci:

$$y = 3\tau_1 - \tau_2.$$

Atunci:

$$y < 2\tau_1 < 2y.$$

Inlocuind pe τ_1 cu $(x - 3y)$, avem:

$$7y \leqslant 2x < 8y.$$

Prin urmare:

y	1	2	3	4	5	...
x	—	7	11	14; 15	18; 19	...

E. G. 600. In ce caz avem:

$$E\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left[E\left(\frac{x}{y}\right)\right]^n$$

$E(i)$ *înseamnă întregii lui* i.

I. L.

Dacă punem: $x = k.y + \tau$ unde avem: $0 \leqslant \tau < y$, atunci:

$$E\left(\frac{x}{y}\right)^n = E\left[k^n + \frac{n.k.y.\tau.A + \tau^\alpha}{y^\alpha}\right]$$

$$\left[E\left(\frac{x}{y}\right)\right]^n = k^n.$$

Trebue deci să avem:

$$n.k.y.\tau.A + \tau^\alpha = 0$$

unde n, k, y, A fiind mai mari ca *zero*, rămâne numai $\tau = 0$.

E. G. 601. Dacă: $E\left(\frac{x}{y}\right) = 2$, *când avem:* $E\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 7$, $E(i)$ *fiind întregii lui* i *?*

I. L.

Prima egalitate ne arată că:

$$2y \leqslant x < 3y.$$

A doua egalitate ne arată că ar trebui să avem:

$$7y^2 \leqslant x^2 < 8y^2$$

sau:

$$\sqrt{7}.y \leqslant x < \sqrt{8}.y.$$

Așa dar a doua este cuprinsă în prima.
Rezultă dar că avem soluțiile:

y	3	4	5	6	7	8	9	10	.....
x	8	11	14	16	19	22	24; 25	27; 28	.....

E. G. 602. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$E\left(\frac{x+10}{x}\right) = 3$$

E (*i*) *fiind întregii lui* i.

I. L.

Observăm că: $3x \leqslant x + 10 < 4x$ sau $x \leqslant 5 < 1{,}5\,.\,x$, prin urmare: $x = 4$ și 5.

Până la 1 Noembrie 1944 s'au primit soluții bune dela:

Liceul „Aurel Vlaicu", București.

Clasa a VII-a: Diaconu C. C. (E. G.: 646, 7, 8, 9, 50).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa a VI-a: Dumitrescu F. S. (VI: 857, 8, 9, E. G.: 643, 4, 6, 7, 8, 9, 50, 1).

Colegiul Național „Carol I", Craiova.

Clasa a VII-a: Brașoveanu D. Gh. (VII: 646, 8, 9, 50)

Elevi particulari.

Clasa a VI-a: Drăghicescu E. (VI: 854, 5, 7, 8).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Martie 1945

Clasa a III-a. *Exerc. 270.* Se dă patrulaterul oarecare ABCD şi se prelungesc laturile şi diagonalele lui dincolo de fiecare vârf după cum urmează:

$$\text{latura } \overline{BA} \text{ cu } \overline{AB_a} = \frac{2}{3}\overline{BA};$$

$$\text{latura } \overline{DA} \text{ cu } \overline{AD_a} = \frac{2}{3}\overline{DA}; \text{ diagonala } \overline{CA} \text{ cu } \overline{AC_a} = \frac{2}{3}\overline{CA};$$

în acelaşi fel luăm

$$\overline{BA_b} = \frac{2}{3}\overline{BA};\ \overline{BC_b} = \frac{2}{3}\overline{BC};\ \overline{BD_b} = \frac{2}{3}\overline{BD};\ \overline{CB_c} = \frac{2}{3}\overline{BC};$$

$$\overline{CD_c} = \frac{2}{3}\overline{DC};\ \overline{CA_c} = \frac{2}{3}\overline{AC};\ \overline{DA_d} = \frac{2}{3}\overline{AD};\ \overline{DC_d} = \frac{2}{3}\overline{CD};$$

$$\overline{DB_d} = \frac{2}{3}\overline{BD}.$$

Să se arată, că diferenţa perimetrelor exagoanelor $D_aD_bD_cB_cB_dB_a$ şi $C_bC_aC_dA_dA_cA_b$ este egală cu $\frac{4}{3}$ din diferenţa diagonalelor patrulaterului dat.

O. N. Ţ.

III. 271. In cercul (O) este înscris un poligon regulat, de exemplu de şapte laturi, ABCDEFG. Se iau în cercul (O), în acelaşi sens, coardele egale

$$\overline{AA'},\ \overline{BB'},\ \overline{CC'},\ \overline{DD'},\ \overline{EE'},\ \overline{FF'},\ \overline{GG'}.$$

Să se arate, că poligonul A'B'C'D'E'F'G' este un poligon regulat, egal cu poligonul dat ABCDEFG.

O. N. Ţ.

III. 272. In cercul (O) este înscris exagonul regulat ABCDEF. Pe fiecare latură construim un triunghiu echilateral în afară:

AA'B, BB'C, CC'D, DD'E, EE'F, FF'A.

Fie A", B", C", D", E", F" intersecţiile perechilor de drepte

(A'D, B'E); (B'E, C'F); (C'F, D'A); (D'A, E'B);

(E'B, F'A); (F'A, A'D).

Să se arate, că poligonul A"B"C"D"E"F" este un exagon regulat, iar latura lui este a şaptea parte din lungimea segmentului $\overline{AD'}$.

O. N. Ţ.

Clasa a IV-a. *Exerc. 715.* Să se verifice, că

$$(n^2 - m - 1)^2 + 4n(n-1)(m+1)(m-n+1) \equiv [n^2 - (2n-1)(m+1)]^2.$$

N. M.

IV. 716. Să se descompună în factori expresiile

$$E_1 \equiv 16a^4 + 81b^4 - 72a^2b^2$$

$$E_2 \equiv 28561x^4 + 14641y^4 - 40898x^2y^2.$$

O. N. Ţ.

IV. 717. Să se descompună în factori expresia

$$E \equiv 43046721x^{16} - 65536y^{16}.$$

O. N. Ţ.

IV. 718. Să se descompună în factori expresia

$$E \equiv 92878667776x^{20} - 95367431640625y^{20}.$$

O. N. Ţ.

Clasa a V-a. *Exerc. 850.* Să se simplifice fracţia

$$\frac{a^2b + \frac{1}{a^2b} + ab^2 + \frac{1}{ab^2}}{a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\left(a^2b + \frac{1}{a^2b}\right) + 3\left(ab^2 + \frac{1}{ab^2}\right) + b^3 + \frac{1}{b^3}}.$$

I. I. S.

V. 851. Ce relaţie trebue să existe între a, b, c pentru a avea identitatea

$$\frac{\dfrac{a}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{b}{(x-a)(x-c)}+\dfrac{c}{(x-a)(x-b)}}{\dfrac{ab+bc+ca}{(x-a)(x-b)(x-c)}}\equiv 2.$$

I. I. S.

V. 852. Insemnând cu

$$ab-c^2=x\ ,\quad bc-a^2=y\ ,\quad ca-b^2=z,$$

să se arate că valoarea câtului

$$Q=\frac{a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3}{xyz}$$

este întreagă în raport cu a, b, c.

I. I. S.

V. 853. Două cercuri (O) şi (I) sunt tangente (interior) în A. O secantă dusă prin A taie cercurile (O) şi (I) în B şi C. Ducem în cercurile (O) şi (I) două coarde paralele oarecare $\overline{BM}$ şi $\overline{CN}$. Să se arate, că punctele A, M, N sunt pe aceeaşi dreaptă.

O. N. Ţ.

V. 854. Fie ABC un triunghiu oarecare şi O centrul cercului său circumscris. Inălţimile $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ ale triunghiului ABC taie a doua oară cercul (O) în M, N, P.

Să se arate, ca razele OA, OB, OC sunt mediatoarele triunghiului MNP. Să se deducă, că laturile triunghiului ortic (având ca vârfuri picioarele A', B', C') sunt paralele cu tangentele la cercul (O) în punctele A, B, C.

O. N. Ţ.

Clasa a VI-a. *Exerc. 866.* Să se determine progresia geometrică în care ultimul termen este 135, raţia 3 şi suma termenului 200.

N. M.

VI. 867. Se dă unghiul drept XOY şi se duc dela OX către OY dreptele OU, OV. Notăm $\sphericalangle XOU = \alpha$, $\sphericalangle UOV = \beta$, $\sphericalangle VOY = \gamma$. Fie M un punct pe OY, N proiecţia sa pe OV. P, proiecţia lui N pe OU şi Q proiecţia lui P pe OX. Punem $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OM}} = k$.

a) Să se arate, că, dacă α, β, γ sunt în progresia aritmetică, atunci $\sqrt{3} < k < \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

b) Să se calculeze α, β, γ pentru ca să avem $k = \frac{6\sqrt{3}}{5}$.

G. D. S.

VI. 868. Să se găsească toate valorile expresiei

$$E \equiv \frac{1 - 2\sin\frac{2n\pi}{5}}{1 - 2\cos\frac{2n\pi}{5}}$$

unde n este un număr întreg.

O. N. Ţ.

VI. 869. Să se găsească toate valorile expresiei

$$E \equiv \frac{1 + \sin\frac{n\pi}{45}}{1 + \cos\frac{n\pi}{45}},$$

unde n este un număr întreg.

O. N. Ţ.

VI. 870. Să se verifice identitatea

$$\operatorname{tg}^6 x - \operatorname{cotg}^2 x = (\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x)(\sec^4 x \operatorname{cosec}^4 x - 4\sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x + 3).$$

O. N. Ţ.

VI. 871. Să se verifice identitatea

$$\frac{\cos^2 a \operatorname{cotg} a - \sin^2 a \operatorname{tg} a}{\cos^2 a \operatorname{cotg} a + \sin^2 a \operatorname{tg} a} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin a \cos a\right)\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin a \cos a\right)}.$$

O. N. Ţ.

Clasa a VII-a. *Exerc. 815.* Să se rezolve ecuaţia

$$n(m-n)\,C_m^n = m(m-1)\,C_{m-2}^{x-1}.$$

N. M.

VII. 816. Să se rezolve ecuaţia

$$n(n-1)\,C_m^x = m(m-n+1)\,C_{m-1}^{x-2}.$$

N. M.

VII. 817. Să se calculeze suma

$$\sum_{n=1}^{n}(4n-1)(16n^2-20n+3).$$

O. N. Ţ.

VII. 818. Folosind identitatea lui MOIVRE

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx,$$

să se calculeze

$$\sin 11x,\ \cos 11x,\ \operatorname{tg} 11x.$$

O. N. Ţ.

VII. 819. Să se stabilească relaţiile

$$1 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{4p} + \ldots = 2^{2n-2} + 2^{n-1}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$C_{2n}^2 + C_{2n}^6 + \ldots + C_{2n}^{2(2p+1)} + \ldots = 2^{2n-2} - 2^{n-1}\cos\frac{n\pi}{2}$$

şi alte două relaţii analoage.

O. N. Ţ.

VII. 820. Să se calculeze suma

$$\sum^{n}(n^6-1).$$

O. N. Ţ.

VII. 821. Să se calculeze suma

$$\sum_{1}^{n}\left(\sum_{1}^{n}(n-1)(2n-1)(3n-1)\right).$$

O. N. Ţ.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 723.* Să se afle distanţa dintre dreptele

$$(a+b)x-(a-b)y-a^2-b^2=0 \qquad (D)$$

$$(a^2-b^2)x-(a^2-2ab)y=0. \qquad (D')$$

I. I. S.

VIII. 724. Să se arate, că cercurile

(C_1) $x^2+y^2-2x-4y+5=0$; $x^2+y^2-2x-6y+9=0$ (C_3)

(C_2) $x^2+y^2-2x-2y+3=0$; $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ (C_4)

trec prin acelaşi punct. Să se determine punctul.

I. I. S.

VIII. 725. Să se găsească şi să se figurèze, într'un sistem de axe ortogonale, coordonatele vârfurilor triunghiului ale cărui laturi sunt date în acest sistem de axe prin ecuaţiile

$4x-3y=0$ (D_1) ; $x+3y-15=0$ (D_2) ; $3x-y+5=0$ (D_3).

b) Să se afle aria triunghiului determinat de aceste drepte.

c) Să se scrie ecuaţia cercului circumscris acestui triunghiu.

GH. P.

VIII. 726. Se consideră sistemul de axe perpendiculare (OX, OY).

a) Să se scrie ecuaţia dreptei OD care face unghiul de 30^0 cu axa OX.

b) Asemenea să se scrie ecuaţia dreptei (OD'), care face cu OD, în sensul pozitiv, unghiul de 45^0.

c) Fie M punctul de abscisă 1 de pe (OD) şi M' proiecţia lui M pe (OD').

d) Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului OMM'.

GH. P.

VIII. 727. Să se rezolve ecuaţia

$$x^5-5x^3+4x^2-3x-2=0.$$

GH. P.

VIII. 728. Un cerc trece prin punctul (6, 1) şi taie axa Oy în punctele A şi B astfel că $\overline{OA}=3$, $\overline{OB}=-2$.

a) Să se găsească ecuaţia cercului.

b) Să se găsească şi să se figureze polul coardei $\overline{AB}$ în în raport cu acest cerc.

c) Să se arate că tangentele la cerc în punctele A şi B sunt perpendiculare una pe alta.

GH. P.

VIII. 729. Se dau punctele A (0, 4), B (4, 6) şi dreapta $x = 3$.

a) Să se găsească ecuaţia cercului (C), care trece prin punctele date A şi B şi are centrul pe dreapta dată.

b) Să se scrie tangentele la acest cerc în A şi B şi să se afle coordonatele polului dreptei AB în raport cu cercul.

c) Să se calculeze unghiul celor două tangente.

GH. P.

VIII. 730. Fie A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) două puncte raportate la un sistem de axe dreptunghiulare OX, OY.

Se păstrează axa OX şi se ia o nouă origină pe ea.

Fie (x_1', y_1'), (x_2', y_2') coordonatele lui A şi B în noul sistem.

Să se arate, că

$$x_1 - x_2 = x_1' - x_2'.$$

GH. B.

Exerciţii Generale. *Exerc. 662.* Cineva a cumpărat trei amestecuri de cafea răşnită şi de năut. Primul amestec are 50% năut. Al doilea amestec are 30% cafea şi 70% năut, iar al treilea amestec are 20% cafea şi 80% năut. Cele trei amestecuri, în cantităţi egale, se amestecă între ele. Care este proporţia de cafea şi năut în noul amestec?

GH. B.

E. G. 663. Dacă numere împărţite cu acelaşi număr dau acelaşi rest, atunci suma lor este mai mare decât de patru ori restul.

I. L.

E. G. 664. Cunoscând într'o împărţire: *deîmpărţitul, împărţitorul, câtul* şi *restul,* care va fi *restul* împărţirii patratului deîmpărţitului prin patratul împărţitorului?

I. L.

E. G. 665. Să se determine patratele perfecte de trei cifre, *abc,* ştiind că $ak + c = b$, unde k este un întreg pozitiv.

I. L.

E. G. 666. Să se determine cuburile perfecte de trei cifre, *abc,* ştiind ca $ka + c = b$, unde k este un număr întreg pozitiv.

I. L.

E. G. 667. Să se rezolve în numere întregi sistemul de ecuaţii

$$x + 3y = 10 \ ; \ 2y - z = 1.$$

I. L.

E. G. 668. Să se rezolve în numere întregi, ecuaţia

$$x^2 + y^2 = (3z)^2.$$

I. L.

E. G. 669. Să se rezolve în numere întregi, ecuaţia

$$x^2 + (5y)^2 = z^2$$

I. L.

E. G. 670. Să determine numerele întregi x şi y, care satisfac relaţia

$$x^2 + y^2 = k^2,$$

unde k este un număr întreg dat.

I. L.

E. G. 671. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$x^2 + y^2 = z^3.$$

I. L.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . Lei 950

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediţia II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** şi **C. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 600

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a). . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1.000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATCĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 27.773.